Dissenyar un tipi. Una activitat competencial per treballar la geometria amb el GeoGebra

Èdgar Ribot-Llobet
Institut Vall de Llémena
eribot3@xtec.cat

Neus Heras Navarro
Institut Vall de Llémena
nheras@xtec.cat

Resum

L'objectiu d'aquest article és explicar el desenvolupament i l'avaluació d'una activitat d'aula competencial en la qual els alumnes hauran d'utilitzar els seus coneixements de geometria per resoldre un problema en un context no matemàtic amb el suport del GeoGebra.

Abstract

The aim of this article is to explain the development and the evaluation of a competency-based classroom learning activity in which students are required to use their knowledge of geometry to solve a problem in a non-mathematical context using GeoGebra.

1. Fitxa tècnica

- Nivell: 2n d'ESO.
- Agrupament: grups cooperatius de 3-4 alumnes.
- Temps: 3 hores.
- Recursos: dispositiu digital amb connexió a Internet, GeoGebra, cilindre i con de plàstic, cartolina, escuradents.
- Continguts de l'àmbit matemàtic treballats: càlcul de superfícies de cossos geomètrics, càlcul de volums, teorema de Pitàgores, canvis d'unitats, estimació de mesures, representació de figures i càlcul de magnituds amb la calculadora 3D del GeoGebra.
- Competències específiques de l'àmbit matemàtic (CEM) avaluades: CEM1 (traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant varia-

bles, símbols, diagrames i models adequats) i CEM6 (emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics).

2. Introducció

Els resultats de l'última prova de competències bàsiques publicades en el número 46 de *Quaderns d'Avaluació* (Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu, 2020) posen de manifest, un any més, que la dimensió matemàtica amb un nivell d'assoliment menor és la d'espai, forma i mesura; és a dir, la dimensió relacionada amb la geometria. I no solament això, sinó que, en aquest aspecte, gairebé la meitat dels alumnes de Catalunya tenen un nivell baix o mitjà baix. Cal recordar que les proves de competències bàsiques no són un conjunt d'activitats de tipus reproductiu i/o memorístic, sinó que persegueixen la resolució de certes situacions més o menys complexes i contextualitzades a partir de coneixements que poden implicar diferents àmbits.

Els motius pels quals els alumnes any rere any mostren dificultats en la geometria, però en canvi mostren un alt domini de la numeració i el càlcul, poden ser múltiples. Un motiu, tal com comenta Damià Sabaté en el seu llibre *La geometria a secundària* (Sabaté, 2005), pot ser tan senzill com la simple reproducció per part del professorat d'allò que va rebre com a alumne en el seu moment. Tal com diu Sabater, els plans d'educació antics van potenciar per sobre de tot el domini de l'àlgebra i el càlcul; per contra, la geometria quedava relegada a un segon pla.

Així doncs, no és casualitat que avui en dia s'acabi reproduint a les aules, molt sovint per inèrcia, el que s'ha fet sempre. Per tant, no és estrany que, mentre que la competència espai, forma i mesura té un nivell d'assoliment baix, la competència de numeració i càlcul estigui quinze punts percentuals per sobre.

Més enllà de parlar de quina importància es dona a la geometria per sobre del càlcul a les classes de matemàtiques, cal centrar el focus en com es treballa la geometria a l'aula. Si l'únic que es demana als alumnes és que memoritzin fórmules per calcular àrees i volums, no ens ha d'estranyar que quan se'ls presenti un problema complex al davant, tinguin moltes dificultats a l'hora de resoldre'l. És per això que existeix la necessitat de treballar la geometria més enllà de la pròpia disciplina, relacionant-la amb diferents àrees de la matemàtica i amb altres àmbits de coneixement, i dotant-la d'un sentit per tal que els alumnes la percebin com a propera.

En aquest sentit, els darrers anys s'han començat a fer passos importants en aquesta direcció i un dels màxims exponents ha estat Anton Aubanell, que amb el seu llibre *Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria* (Aubanell, 2010) reflexiona sobre les causes d'aquesta situació, que divideix en dues categories: per una banda, el desequilibri en la implementació pràctica del currículum; per l'altra, la metodologia del treball geomètric a l'aula. Tenint això present, proposa tres línies bàsiques de millora:

1. augmentar la presència de la geometria i moderar la del càlcul;
2. integrar en el treball geomètric activitats més riques competencialment;
3. incorporar més geometria i raonament visual a tots els blocs de continguts.

Aquest article presenta una activitat centrada en el segon punt de la línia d'actuació que proposa Aubanell. Els alumnes hauran de transferir els coneixements adquirits al llarg d'una unitat didàctica de geometria, al disseny d'un tipi de forma cònica, del qual hauran de fixar les dimensions oportunes donades unes condicions de disseny.

3. Metodologia

3.1. El treball en grup

Aquesta activitat es durà a terme en grups cooperatius heterogenis. Els grups els va dissenyar el professor tenint en compte les diferents habilitats dels alumnes del grup classe, així com la paritat. Cada alumne té un dels rols següents segons quina sigui la seva habilitat:

- Tècnic dissenyador: mostra una habilitat gràfica i creativa.
- Matemàtic: té habilitats matemàtiques com ara el càlcul, la geometria i el llenguatge algebraic.
- Redactor: té una alta capacitat comunicativa, tant oral com en lectoescriptura.
- Coordinador: té capacitat organitzativa i de lideratge. En aquest rol, l'alumne s'ha d'assegurar que les tasques es fan en el temps establert, ha de controlar que el to de veu del grup no excedeixi el desitjable i ha de moderar els debats interns, entre altres coses.

D'aquesta manera, assegurant que un grup està format per alumnes amb diferents perfils i habilitats, s'aconsegueix un enriquiment mutu mitjançant l'aprenentatge entre iguals. Cal remarcar, però, que els rols no impliquen que l'alumne en qüestió hagi de fer tota la feina relacionada amb el seu camp; és a dir, el matemàtic no només és l'encarregat de fer els càlculs, sinó que és el responsable que els càlculs pertinents es facin, que es facin bé i, a més, que tots els membres del grup ho entenguin i col·laborin.

Per aconseguir l'èxit del treball cooperatiu és indispensable que existeixi un veritable aprenentatge entre iguals. Amb aquest objectiu, s'ha de tenir en compte que els alumnes que formen el grup no poden tenir nivells d'assoliment i ritmes d'aprenentatge molt diferents, ja que si això passa, no existirà un llenguatge entre iguals ni una veritable comunicació entre ells. Aquesta situació sol abocar l'alumnat amb més dificultats a no participar plenament en la resolució de l'activitat i la resta, a queixar-se'n. La fractura del grup impedeix que s'estableixi una cooperació real, cosa que propiciarà que no existeixi un treball cooperatiu.

3.2. Atenció a la diversitat

Com es veurà en l'apartat següent, aquesta activitat s'estructura al voltant del con, un cos geomètric que pot esdevenir complex de treballar en una activitat com aquesta per a una part de l'alumnat. Amb l'objectiu que puguin fer l'activitat, es proposen diferents mecanismes que es poden presentar per separat o conjuntament, depenent del nivell d'adaptació desitjada:

- Proporcionar un model, que contindrà tots els passos que s'han de seguir, algunes ajudes per poder fer bones estimacions, les equacions necessàries per fer els càlculs i, fins i tot, alguna activitat semblant d'anys anteriors.

- Treballar amb cossos més senzills: una piràmide de base quadrada o rectangular, en un primer nivell d'adaptació, i un ortoedre de base quadrada o fins i tot un cub, per a casos més extrems.

3.3. Riquesa competencial

Una de les característiques d'una activitat competencial és que l'alumne ha de poder produir una solució nova a partir de tot el que ha après a l'aula. És a dir, no s'ha de limitar a fer una mera reproducció dels coneixements i procediments adquirits, sinó que ha de ser capaç de traslladar-ho a situacions innovadores, diferents, complexes i inesperades.

Altres característiques de les activitats competencials que s'han tingut molt en compte en la proposta d'activitat que es presenta són:

- L'alumne ha de crear a partir d'unes premisses o condicions establertes.
- No es proporcionen dades que es poden suposar, estimar o predir a partir del context. D'aquesta manera, l'estudiant ha de raonar sobre la situació proposada i ha d'aplicar-la a la realitat.
- Es fomenta l'estimació de mesures i resultats i s'incentiva la presa de decisions.
- Es demana i es valora la justificació de les decisions preses.
- La solució òptima sorgeix quan es comparteixen les idees i els arguments.

En aquest cas, es demana als alumnes que estimin les dades inicials del problema (el radi i l'alçada) a partir d'unes restriccions que provenen del context de l'activitat, i que justifiquin totes les decisions preses: l'estimació de dades, les suposicions, les aproximacions i la utilització d'equacions. Cal que l'estudiant expliqui cada pas que faci en el problema i raoni els resultats.

4. Presentació de l'activitat

Dins d'una unitat didàctica de geometria i després d'haver treballat les figures planes, les àrees, les superfícies i els volums dels cossos geomètrics, així com el teorema de Pitàgores per a figures i cossos, es demana als alumnes que dissenyin una tenda de campanya. L'enunciat diu:

Per fi ha arribat l'estiu i tu i tres amics més decidiu que voleu anar a passar una setmana en un campament de supervivència enmig de la natura que s'organitza des del vostre grup d'esplai. En arribar, els monitors us expliquen que durant els pròxims dies haureu d'aprendre a viure amb els recursos que us ofereix el bosc i haureu d'elaborar els vostres propis utensilis i el menjar. La primera necessitat que haureu de cobrir serà el lloc on dormireu. Els monitors us diuen que heu de dissenyar una tenda de campanya que us serveixi per passar totes les nits.

Per tal de fer l'activitat, s'imposen les següents condicions sobre el disseny de la tenda:

- Ha de tenir capacitat per a tres persones.
- Hi han de cabre estirades (per dormir).

- Hi ha de cabre una persona dreta al centre.
- Ha de ser en forma de tipi.
- Ha de tenir un volum mínim de 4 m^3 (per assegurar que hi ha prou aire per passar la nit).
- La superfície màxima de tela ha de ser de 40 m^2 (per assegurar que hi ha prou tela per a tots els participants).
- Els pals o les canyes que donen rigidesa a la tenda s'han d'obtenir de l'entorn.
- Es disposarà de cordes i piquetes per subjectar la tenda al terra.

Arribats a aquest punt, es pot decidir guiar més o menys l'activitat, i això fins i tot es pot anar decidint a mesura que avanci l'activitat i es puguin detectar les dificultats de l'alumnat. Les guies que es proposen són les següents:

a) Buscar informació sobre què és un tipi i com es construeix.
b) Estudiar bé el disseny d'un tipi: a quin tipus de cos geomètric s'aproxima, quin és el seu desplegament i quines són les seves equacions de superfície i volum.
c) Definir l'àrea de la base necessària perquè hi puguin dormir tres persones.
d) Fixar l'alçada del tipi de manera que una persona pugui estar dreta al centre.
e) Assegurar que té el volum mínim.
f) Calcular la llargada que hauran de tenir els pals que sostindran el tipi.
g) Calcular els metres quadrats de roba que caldran d'acord amb el disseny.
h) Crear el disseny amb el GeoGebra i comprovar que totes les mides i els càlculs coincideixen.

5. Desenvolupament de l'activitat

a) *Buscar informació sobre què és un tipi i com es construeix*

És molt probable que pocs alumnes sàpiguen què és un tipi. Per tant, el primer punt serà buscar què és. Aquest primer punt és força ràpid i quan els alumnes veuen una fotografia de seguida saben de què es tracta. Ho relacionen relativament ràpid amb les construccions tradicionals dels nadius americans i fins i tot algun alumne recorda haver-ne tingut un de petit.

b) *Estudiar bé el disseny d'un tipi: a quin tipus de cos geomètric s'aproxima, quin és el seu desplegament i quines són les seves equacions de superfície i volum.*

Objectius: identificar cossos geomètrics en entorns no matemàtics, deduir equacions de volum i superfície (avançat), fer el desplegament de cossos geomètrics.

Una vegada han buscat informació sobre què és un tipi, observem que l'alumnat fa dues aproximacions:

- Un con (la desitjada).
- Una piràmide que té per base un polígon regular de *n* costats, on *n* és el nombre de pals (arestes) que subjecten la tela.

En aquest punt se'ns plantegen dues opcions. La primera és deixar que els alumnes triïn l'opció que desitgin i la segona, encarar-los cap a l'opció que ens interessi. En aquest cas, s'opta per encaminar-los cap al con, pel fet que no ha estat treballat prèviament, a diferència de tots els altres cossos. La idea és que l'alumnat transfereixi els aprenentatges de geometria adquirits a l'aula, a un cas particular que no ha estat estudiat prèviament a l'aula. Això comporta que hauran de deduir les equacions de superfície i volum.

Per esbrinar l'equació de volum es durà a terme la pràctica de comparació de volums entre el cilindre i el con. Es proporciona als alumnes un cilindre (que han estudiat prèviament a l'aula) i un con amb les mateixes base i altura, tal com es veu en la imatge:

Figura 1. Cilindre i con per fer la pràctica de volums.

Han d'omplir d'aigua els dos cossos i posteriorment mesurar-ne el volum, d'aquesta manera podran comprovar que el volum del con és un terç del del cilindre. Com que saben l'equació de volum d'un cilindre:

$$V_{\text{cilindre}} = A_{\text{base}} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h \tag{1}$$

els serà senzill deduir l'equació de volum d'un con:

$$V_{\text{con}} = \tfrac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h = \tfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \tag{2}$$

Arribar a l'equació de volum no presenta gaires dificultats gràcies a la pràctica amb material manipulatiu, i a l'hora de calcular-lo tampoc no presenta cap dificultat ja que solament depèn de dues magnituds prou conegudes: l'altura i el radi. Ambdues es fixaran en els pròxims passos.
No obstant això, l'equació per al càlcul de la superfície els resulta més complicada. Fàcilment veuen, a partir del desplegament, que la superfície del con ha de ser igual a la suma de la base (circumferència) i la cara corba (sector circular). Si hi ha alguna dificultat en aquest sentit, es pot facilitar als alumnes que ho necessitin un con de cartolina per tal que en facin el desplegament manipulatiu:

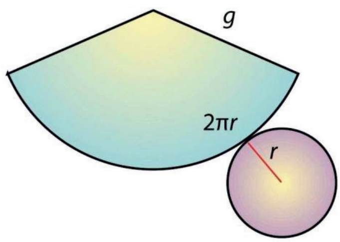

Figura 2. Desplegament pla d'un cilindre.

El problema apareix justament amb la cara corba: quin tipus de figura és?, com es calcula la seva àrea? Si bé els sectors circulars s'estudien en cursos anteriors, no és un tipus de figura que aparegui sovint i, per tant, s'entén la dificultat de gran part de l'alumnat a identificar-la. Per deduir l'equació hauran de comprovar que l'arc del sector és igual al perímetre de la circumferència de la base. Novament, es pot utilitzar un con de cartolina per facilitar la comprensió. El raonament és paral·lel per trobar un dels costats del rectangle del desplegament del cilindre. L'àrea del sector circular, sabent la longitud de l'arc (L) i el seu radi (R), és:

$$A_{\text{sector}} = \frac{1}{2} \cdot L \cdot R \tag{3}$$

En aquest cas concret i tal com es pot veure a la figura 2, el radi del sector circular és igual a la generatriu del con:

$$\begin{aligned} R &= g \\ A_{\text{sector}} &= \frac{1}{2} \cdot L \cdot g \end{aligned} \tag{4}$$

i, finalment, la longitud de l'arc correspon a la longitud de la circumferència de la base:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r \tag{5}$$

Substituint eq. 5 a l'eq. 4 obtenim finalment l'àrea del sector circular del nostre tipi:

$$A_{\text{sector}} = \pi \cdot r \cdot g \tag{6}$$

És molt probable que alguns dels alumnes no arribin a comprendre la demostració de l'àrea del sector circular. En aquest cas, es prioritzarà solament la comprensió que aquesta àrea depèn del radi de la base i la generatriu del con.

S'introdueix un nou concepte: la generatriu. Una gran part dels alumnes n'intueix el significat a partir de la representació plana del con i dels treballs previs que s'han fet amb la creació de cossos de revolució. S'adonen que l'altura, el radi de la base i la generatriu conformen un triangle rectangle (raonament que necessitarem més endavant), i que el radi i l'altura són els catets i la generatriu és la hipotenusa. Alhora, és una bona oportunitat per recordar als alumnes que els cossos de revolució es formen a partir de la revolució d'una figura geomètrica al voltant d'un eix i que, en el cas del con, és justament la revolució d'aquest triangle rectangle (figura 3). Novament, el ma-

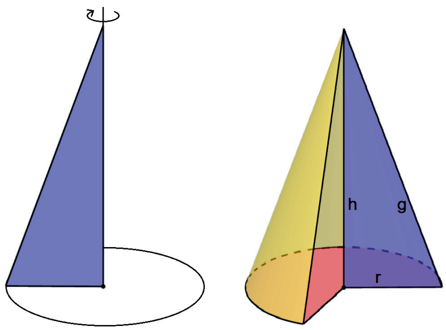

Figura 3. La revolució d'un triangle rectangle és un con.

terial manipulable ens pot resultar útil per mostrar la revolució d'aquest triangle. Per fer-ho, necessitem un triangle rectangle de cartolina, un escuradents i cinta adhesiva. Finalment, sols queda fer-lo girar. Es pot gravar amb un dispositiu mòbil i observar-ne el resultat.

c) *Definir l'àrea de la base necessària perquè hi puguin dormir tres persones*

Objectiu: calcular l'àrea d'una circumferència fixant un diàmetre a partir d'una restricció.

El primer que raonen els alumnes és que, perquè hi puguin dormir tres persones, la base ha de tenir una «llargada» que ve determinada per l'altura de les persones. Una bona suposició d'alçades es trobarà entre un marge d'entre 1,5 i 2 metres. D'altra banda, han de tenir en compte que cada persona també ocupa una amplada determinada. Una bona suposició estarà al voltant d'1 m (figura 4).

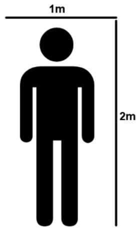

Figura 4. Espai que ocupa una persona quan dorm.

Així, una vegada definit l'espai que ocupa una persona quan dorm, es pot determinar el que ocupen tres persones. Tal com es pot veure a la figura 4, es pot assimilar a un rectangle de 3 × 2 m.

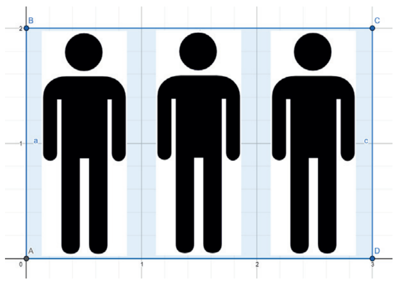

Figura 5. Espai que ocupen tres persones quan dormen.

Per acabar de determinar la base és necessari trobar una circumferència que inscrigui el rectangle anterior. Per fer-ho, es pot deduir que el diàmetre ha de ser igual a la diagonal del rectangle i, per trobar-ho, aplicar el teorema de Pitàgores. En aquest cas, tenim un triangle amb uns catets de 2 m i 3 m i una hipotenusa de 3,6 m; per tant, la circumferència tindrà un radi d'1,8 m. També es pot utilitzar novament el GeoGebra per comprovar el càlcul i veure que, efectivament, el rectangle està inscrit en la circumferència i aquesta passa pels vèrtexs del rectangle.

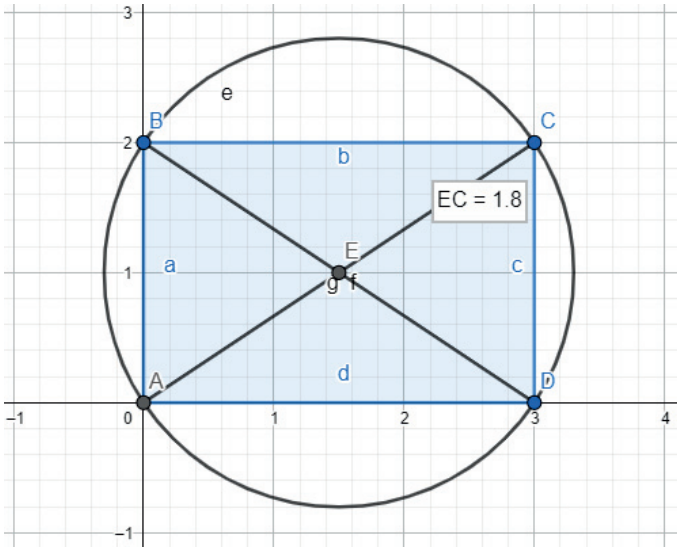

Figura 6. Esquema de la base circular del tipi.

És possible que alguns alumnes suposin una àrea de la base directament, sense passar pel raonament de l'alçada. En aquest cas, se'ls ha de fer veure que no s'han assegurat que hi càpiguen tres persones; per tant, tenen dues opcions: o seguir els passos descrits anteriorment, o bé, a partir de l'àrea suposada, calcular el diàmetre i comprovar si hi caben persones.

d) *Fixar l'alçada del tipi de manera que una persona pugui estar dreta al centre*

Objectiu: fixar una dada a partir d'una restricció.

En l'apartat anterior ja s'ha suposat l'alçada i l'amplada d'una persona. Per tant, el rectangle que fixarà l'alçada serà d'1 × 2 m. A més, tenint en compte que el diàmetre de la base és de 3,6 m, centrant el rectangle a la base i introduint totes aquestes dades al GeoGebra s'obté l'esquema de la figura 7:

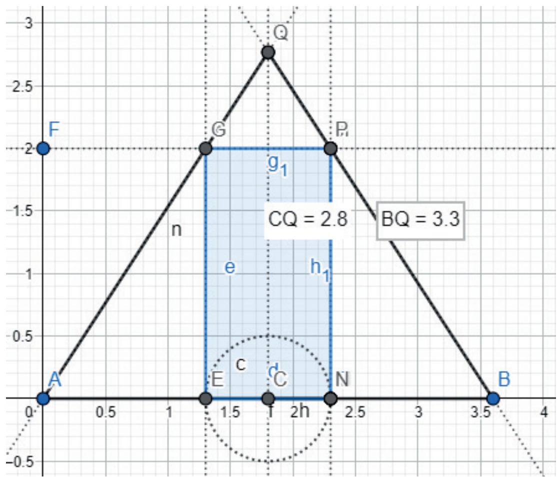

Figura 7. Esquema de l'alçat del con aplicant les condicions de disseny.

A partir de la intersecció dels segments *AQ* i *BQ* es pot trobar l'alçada *CQ* de 2,8 m, així com la generatriu BQ de 3,3 m.

e) *Assegurar que té el volum mínim*

Objectiu: calcular el volum d'un con a partir de dades fixades.

Un cop fixat el radi de la base i l'altura del tipi, es pot calcular el volum d'aire i comprovar que compleix la condició imposada a l'enunciat. Els alumnes hauran d'aplicar la fórmula de volum de l'equació 2, juntament amb l'alçada trobada a l'apartat anterior i el radi fixat en l'apartat *c*.

Com que el radi de la base fixat a l'apartat *c* és d'1,8 m i l'alçada calculada amb el GeoGebra a l'apartat *d* és de 2,8 m, el volum és de 9,5 m^3. Com que $9{,}5 > 4$, es compleix la condició de disseny.

En cas que el volum fos més petit que 4, els alumnes haurien de tornar o bé a l'apartat *c* o bé al *d* i augmentar-ne les dimensions.

f) *Calcular la llargada que hauran de tenir els pals que sostindran el tipi*

Objectiu: calcular la generatriu d'un con mitjançant el teorema de Pitàgores

Com que en l'apartat *d* els alumnes ja han mesurat la generatriu amb el GeoGebra, se'ls pot demanar que comprovin o demostrin que el valor obtingut és correcte. Per fer-ho, hauran de calcular la hipotenusa del triangle rectangle format pel radi de la base i l'alçada del con, que seran el catets.

Alguns alumnes van comentar que si els pals fessin exactament la longitud de la generatriu, quedarien una mica curts, ja que una part es necessitarà per fixar el tipi al terra i, per altra banda, seria bo que sobresortissin un xic per la part de dalt per tal de lligar-los. Per tant, als 3,3 m de la generatriu s'hi poden afegir 20 cm, de manera que la llargada total dels pals necessaris serà de 3,5 m. En qualsevol cas, és important que vegin que no convé que mesurin exactament el mateix que la generatriu per poder fer una bona construcció.

g) *Calcular els metres quadrats de roba que caldran*

Objectiu: calcular la superfície d'un con.

Arribats a aquest apartat, els alumnes ja disposen de totes les dades necessàries per calcular la superfície del con: el radi de la base i la generatriu. Hauran de comprovar que la superfície no superi els metres quadrats fixats a l'enunciat. Cal dir que aquesta dada està sobredimensionada i realment és molt difícil que els alumnes superin els 40 m^2, i en el cas que ho facin vol dir que alguna de les dades que han fixat no és realista i, per tant, han de tornar als apartats *c* i *d*.

En aquest apartat, alguns alumnes van exposar el dubte si era necessari comptar la superfície de la base, és a dir, si era necessari posar tela al terra. En aquest sentit, es va donar llibertat de decisió en funció del propi criteri i la disponibilitat de tela.

En aquest cas, tenint en compte que el radi de la base és d'1,8 m i la generatriu és de 3,3 m, si apliquem l'equació 6 la superfície resultant és de 18,7 m^2. Si, a més, es desitja posar tela al terra, s'haurà de calcular l'àrea de la base del con resultant: 10,2 m^2. Si se sumen ambdues àrees, s'obté una àrea total del con de 28,9 m^2. Com que 28,9 <40, es compleix la condició de disseny.

h) *Crear el disseny amb el GeoGebra i comprovar que totes les mides i els càlculs coincideixen*

Objectius: utilitzar el GeoGebra per representar una figura en 3D. Comprovar els valors de la generatriu, la superfície i el volum calculats.

Independentment que l'alumnat estigui més o menys acostumat a treballar amb el GeoGebra, dibuixar un con és relativament fàcil i intuïtiu fins i tot per a principiants. Solament hauran d'introduir el punt del centre de la base (recomanem utilitzar l'origen de coordenades), l'alçada i, finalment, el radi. Un cop introduït, apareixerà el tipi i podran calcular-ne l'àrea i la superfície amb les funcionalitats del GeoGebra, per poder-ho comparar amb els seus propis resultats.

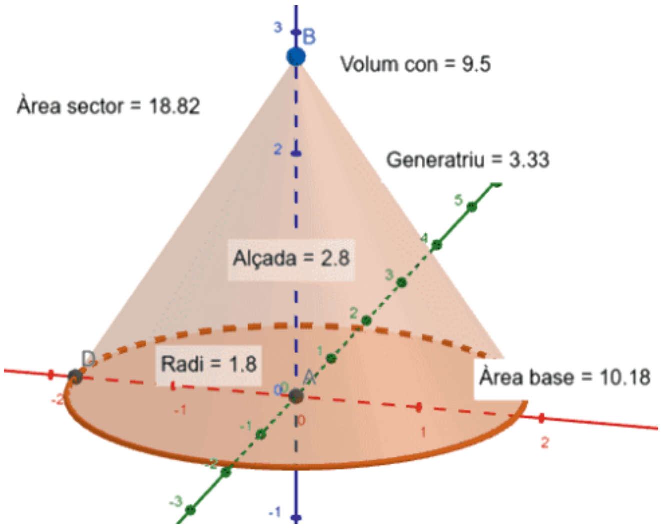

Figura 8. Esquema final del tipi amb les seves dimensions.

6. Avaluació

Un aspecte imprescindible i que a vegades queda oblidat per manca de temps o, fins i tot, per la mala creença que és un aspecte secundari, és l'avaluació. Si en finalitzar una activitat competencial com aquesta no es dedica el temps suficient perquè els alumnes reflexionin sobre el que han fet, l'aprenentatge queda incomplet. És per això que la proposta d'avaluació per a aquesta activitat és una sessió d'una hora on es farà una coavaluació.

És molt recomanable fer servir la rúbrica d'un sol punt, per tal que puguin reflexionar més profundament sobre la tasca avaluada. Aquesta rúbrica ha de partir dels indicadors d'avaluació, però s'ha d'adequar al vocabulari de l'alumnat per tal que la facin seva. Cal que siguin els mateixos alumnes el qui proposin els ítems que han d'aparèixer a la rúbrica. No obstant això, el docent ha de tenir una proposta que no ha de compartir amb l'alumnat, sinó que els ha de fer bones preguntes i els ha de mostrar els models necessaris perquè siguin ells els que arribin a formular uns indicadors alineats amb els desitjats. La taula següent presenta una possible proposta.

Criteris de realització	Criteris d'avaluació		
	Elements destacats: «Et felicito per...»	**En què em fixaré?**	**Elements per millorar: «Et suggereixo que...»**
Interpretació del problema		Tradueix un problema geomètric a llenguatge matemàtic i elabora una estratègia de resolució correcta, clara i ben explicada.	
Resolució del problema		Aplica l'estratègia proposada per calcular àrees i volums de figures geomètriques. Utilitza variables, símbols, diagrames i models treballats i n'elabora de propis. Justifica les decisions preses.	
Mesures i unitats		Escull les unitats de mesura adequades en cada situació, i en justifica i raona els motius. És capaç de fer la conversió d'unitats de longitud, àrea i volum.	
Aplicació dels aprenentatges previs		Coneix el teorema de Pitàgores i l'aplica correctament utilitzant els diagrames i càlculs adequats. Sap justificar-ne l'ús.	
Identificació dels cossos geomètrics		És capaç d'identificar cossos geomètrics a partir de la descomposició d'imatges de contextos reals complexos. Coneix les propietats dels cossos geomètrics i les aplica per resoldre el problema.	
Representació de cossos geomètrics		Representa el cos geomètric en un context real complex mitjançant qualsevol de les tècniques treballades: desenvolupament pla, representació plana. Això li permet resoldre qüestions directament lligades al problema proposat.	
Ús del Geogebra		Fa ús de les funcions estàndard i complexes com a suport per resoldre i representar problemes de geometria. És capaç d'aprendre per si mateix funcionalitats no treballades a l'aula i d'explicar-les als companys.	
Interès per l'aprenentatge i la millora		Manifesta interès pel problema i s'esforça per trobar la millor solució de manera continuada. Fa les tasques amb interès i constància. Reconeix els errors i està disposat a esmenar-los.	
Disseny		El disseny del treball és ordenat i equilibrat. Les imatges tenen peu. La distribució dels apartats i el format milloren la seva comprensió.	
Ús de la llengua		La redacció del text és entenedora. El lèxic utilitzat és específic del tema treballat i la sintaxi, amb frases curtes i completes, és l'adequada. No hi ha faltes d'ortografia.	

És important remarcar que la coavaluació no té en cap cas una qualificació numèrica, sinó que és un retorn en forma d'avaluació reguladora. Per tant, l'objectiu és que facin uns bons comentaris amb l'objectiu de millorar l'activitat realitzada pel seu company. Una vegada han rebut de tornada la rúbrica de coavaluació, disposen de mitja hora per introduir les millores proposades pels seus companys que considerin.

En la rúbrica d'avaluació del professor basada en les competències específiques de l'àmbit matemàtic (CEM) i els criteris d'avaluació (CA) associats, s'especifiquen els objectius d'aprenentatge concrets d'aquesta activitat, així com els indicadors per poder obtenir la qualificació final de l'activitat.

Competències específiques de l'àmbit matemàtic	Criteris d'avaluació competencials	Objectius d'aprenentatge	Indicadors d'avaluació		
			Nivell 1 (assoliment satisfactori)	**Nivell 2 (assoliment notable)**	**Nivell 3 (assoliment excel·lent)**
CEM1 Interpretar, modelitzar i resoldre situacions de la vida quotidiana, pròpies de les matemàtiques i d'altres àmbits del coneixement aplicant diferents estratègies i formes de raonament per explorar procediments i obtenir solucions.	**CA1.1** Interpretar problemes matemàtics organitzant la informació donada i comprenent les preguntes formulades.	**O1.** Calcular longituds, àrees i volums mitjançant la traducció del problema a llenguatge matemàtic i utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.	Tradueix un problema de geometria senzill a llenguatge matemàtic per calcular àrees i volums de figures geomètriques bàsiques.	Tradueix un problema geomètric a llenguatge matemàtic amb l'objectiu de calcular àrees i volums de figures geomètriques. Utilitza les variables, els símbols, els diagrames i els models treballats i adequats en cada cas.	Tradueix un problema geomètric a llenguatge matemàtic i elabora una estratègia de resolució amb l'objectiu de calcular àrees i volums de figures geomètriques. Utilitza les variables, els símbols, els diagrames i els models treballats i n'elabora de propis, i en justifica l'adequació en cada cas.
		O2. Escollir les unitats de mesura més adequades en cada situació. Canviar i relacionar les diferents unitats de la geometria (longitud, àrea i volum).	Escull les unitats de mesura adequades en contextos senzills. És capaç de fer conversions d'unitats bàsiques de longitud, àrea i volum.	Escull les unitats de mesura adequades en cada situació. És capaç de fer conversions d'unitats (longitud, àrea i volum) mitjançant factors de conversió.	Escull les unitats de mesura adequades en cada situació i en justifica i raona els motius. És capaç de fer tot tipus de conversió d'unitats (longitud, àrea i volum) en qualsevol escala mitjançant factors de conversió.
		O3. Conèixer i aplicar el teorema de Pitàgores en la resolució de problemes en diferents contextos.	Coneix el teorema de Pitàgores i l'aplica en casos senzills i concrets	Coneix el teorema de Pitàgores i l'aplica en diferents tipus de contextos reals utilitzant els diagrames i càlculs adequats.	Coneix el teorema de Pitàgores i l'aplica en tot tipus de contextos reals utilitzant els diagrames i càlculs adequats. Sap justificar el seu ús en cada context.
CEM6 Vincular i contextualitzar les matemàtiques amb altres àrees de coneixement, interrelacionant conceptes i procediments, per resoldre problemes i desenvolupar la capacitat crítica, creativa i innovadora en situacions diverses.	**CA6.1** Reconèixer i utilitzar les matemàtiques presents en la vida quotidiana usant els processos inherents a la investigació científica i matemàtica: inferir, mesurar, comunicar, classificar, predir…, en situacions susceptibles de ser abordades en termes matemàtics	**O4.** Identificar figures i cossos geomètrics en contextos no matemàtics i utilitzar el coneixement sobre les seves propietats i la seva classificació per descriure el món físic	És capaç d'identificar cossos geomètrics a partir de la descomposició d'imatges de contextos reals senzills. Coneix les propietats bàsiques dels cossos geomètrics i els classifica adequadament per descriure el món físic	És capaç d'identificar cossos geomètrics a partir de la descomposició d'imatges de contextos reals. Coneix les propietats dels cossos geomètrics i els classifica adequadament per descriure el món físic.	És capaç d'identificar cossos geomètrics a partir de la descomposició d'imatges de contextos reals complexes. Coneix les propietats dels cossos geomètrics i els classifica adequadament per descriure el món físic.
		O5. Representar cossos geomètrics en contextos reals mitjançant les tècniques del desenvolupament pla, la representació plana i la construcció i deconstrucció de cossos.	Representa cossos geomètrics bàsics en un context real mitjançant alguna de les tècniques treballades: desenvolupament pla, representació plana i construcció i deconstrucció de cossos	Representa tot tipus de cossos geomètrics en un context real mitjançant qualsevol de les tècniques treballades: desenvolupament pla, representació plana i construcció i deconstrucció de cossos.	Representa tot tipus de cossos geomètrics en un context real complex mitjançant qualsevol de les tècniques treballades: desenvolupament pla, representació plana i construcció i deconstrucció de cossos.

7. Possibles continuacions

Aquesta activitat té una duració total de 3 hores: una hora i 45 minuts per elaborar l'activitat, 15 minuts per acordar la rúbrica d'un sol punt amb els alumnes, mitja hora per a la coavaluació i mitja hora més per introduir les millores proposades. No obstant això, és possible continuar treballant al voltant d'aquest context i connectar la activitat a altres àmbits tal com es proposa a continuació:

- Construir una maqueta del tipi a escala. D'aquesta manera es treballen la proporcionalitat i els materials i les tècniques de construcció des de la tecnologia.
- Construir el tipi que hagi estat més ben dissenyat i escollit per tota la classe. Els materials necessaris són: canyes, roba i corda. Posteriorment es podria cedir a alguna escola pròxima.
- Pregunta investigable de l'àmbit científic: quins factors hem de tenir en compte per calcular el volum mínim del tipi? S'han de tenir en compte els factors següents:
    - Biològics: respiració, necessitat d'oxigen, paper del CO_2.
    - Químics: concentracions de gas.
    - Matemàtics: percentatges per a les concentracions.

8. Conclusions

Els alumnes es van endinsar en un problema sense dades i això va comportar algunes dificultats a l'hora de començar l'activitat. Una vegada superat aquest escull, però, van ser capaços de fixar dades de manera raonada per a un disseny correcte d'acord amb les restriccions. La gran majoria dels alumnes van ser capaços de transferir els coneixements adquirits a classe a un cas que no havien treballat prèviament. Van trobar útil l'ús del GeoGebra en la realització de l'activitat perquè van veure un ús pràctic d'aquesta aplicació. Van valorar positivament poder fer una coavaluació, ja que posteriorment els va permetre millorar el seu treball i, així, obtenir millors resultats.

9. Referències

Aubanell, A. «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria». *Quaderns d'Avaluació*, núm. 31 (2015): 63-137.

Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu, 2020. *L'avaluació de quart d'ESO 2020*. http://csda.gencat.cat/ca/arees-actuacio/avaluacions-consell/avaluacio-quart-eso/

Sabaté, D. *La geometria a secundària.* Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya, 2005.